Variabel Acak dan Nilai Harapan

Variabel acak /random adalah fungsi bernilai nyata yang didefinisikan dalam ruang sampel dan rekan nilai numerik yang unik dengan masing-masing hasil dari percobaan acak (deskripsi numeric dari hasil percobaan).

Variabel acak adalah sebuah fungsi (pemetaan) yang menandai suatu hasil dari eksperimen sebagai suatu nilai numerik. Nilai numerik ini banyaknya dapat terhitung maupun tak hingga, tergantung eksperimen dan ruang sampelnya.

- Variabel acak kontinu adalah variabel random yang dapat mengambil tak hingga banyak nilai numerik.
- Sebaliknya, variabel random diskrit adalah variabel random yang hanya dapat mengambil nilai sebanyak terhitung**.**

Variabel acak diskrit; variabel acak diskrit hanya membutuhkan bilangan yang dapat dihitung dari nilai-nilai yang berbeda seperti 0, 1, 2, 3...

Variabel acak kontinu dapat mencakup himpunan bilangan tak terbatas dan tak dapat dihitung dari nilai yang mungkin seperti, (dalam bentuk pecahan).

Distribusi Probabilitas variabel acak diskrit

Suatu peubah acak diskrt tiap nilai yang mungkin mendapatkan nilai peluang tertentu.

Distribusi Peluang adalah tabel yang berisi nilai dari variabel random dan peluangnya

Syarat probabilitas diskrit

- $P(X) \geq 0$
- Total Prob = 1 $\sum p(x) = 1$

Contoh; Jumlah anggota keluarga dari 1000 pelanggan ….

Jumlah anggota kel.(X_i)	Jumlah pelanggan (f_i)	P(x)
3	50	0,05
4	150	0,15
5	300	0,30
6	350	0,35
7	150	0,15

Jika X adalah jumlah anggota keluarga, maka p (3) adalah peluang jumlah anggota kel . 3. p(4) adalah peluang jumlah anggota kel 4. Dst.

Peluang jika anggota kel 5 atau lebih, maka peluangnya adalah p(5) + p(6) + p(7) = 0,30 + 0,35 + 0,15 = 0,80

Nilai Harapan (E(X) , Varian (ρ2)dan Standar deviasi variabel acak diskrit (ρ)

Nilai harapan variabel acak diskrit adalah rata-rata tertimbang terhadap semua kemungkinan hasil, dimana penimbangnya adalah peluang yang berhubungan dengan setiap hasil.

Rata-rata (ɥ) dari distribusi peluang merupakan nilai harapan (expected value) dari variabel acak.

$$\mathbf{E(X) = ɥ_x = x_1P(1) + x_2P(2) + \ldots\ldots\ldots + xP(x)}$$

Dimana : X ; nilai ke I dari variabel acak i

P(x) ; peluang X_i

Varian (ρ^2) adalah rata-rata tertimbang dari kuadrat selisih antar setiap kemungkinan hasil dan rata-rata dimana penimbangnya adalah peluang dari masing-masing hasil tersebut

$$\boldsymbol{\rho^2 = \sum (X - ɥ)^2 = \sum (x_i - ɥ)^2 \cdot p(x_i)}$$

Dimana : x_i ; nilai ke I dari variabel X

P(x); peluang x_i

Standar deviasi (ρ) adalah akar dari nilai varian

$$\boldsymbol{\rho = \sqrt{\rho^2}}$$

Contoh: Hitunglah rata-rata varian dan standar deviasi data diatas

Nilai harapan ; E(X) = 3(0,05) + 4(0,15) + 5(0,30) + 6(0,35) + 7(0,15) = 5,4

Varian ; $\rho^2 = (3 – 5,4)^2(0,05) + (4 – 5,4)^2(0,15) + \ldots\ldots\ldots +(7 – 5,4)^2(0,15) = 1,14$

Standar deviasi ; $\rho = \sqrt{1,14} = 1,07$

Distibusi peluang teoritis / Peluang teoritis

adalah suatu daftar yang disusun berdasarkan peluang dari peristiwa- peristiwa bersangkutan**.**

Distribusi Teoritis memungkinkan pembuat keputusan untuk memperoleh dasar logika dalam membuat suatu keputusan yang berguna sebagai dasar pembuatan ramalan berdasarkan informasi yang terbatas atau pertimbangan teorutis dan berguna pula untuk menghitung peluang suatu kejadian.

Macam- macam Distribusi Peluang Teoritis
a.Peubah Acak Diskrit

1. Distribusi Binominal
2. Distribusi Poisson
3. Distribusi Multinominal
4. Distribusi Hipergeometris

b. Peubah Acak Kontiniu

1. Distribusi Normal
2. Distribusi Student
3. Distribusi *Chi Square*
4. Distribusi Fischer

Distribusi peluang teoritis acak diskrit

1. Distribusi binomial
   Ciri-ciri:
   - Jumlah eksperimen merupakan bilangan tetap.
   - Setiap eksperimen mempunyai 2 hasil yang dikategorikan sebagai sukses (**p**) dan gagal (q), dimana p + q = 1

     Setuju (sukses), tidak setuju (gagal)

     Puas (sukses), tidak puas (gagal)
   - Peluang sukses setiap percobaan sama
   - Percobaan harus independen satu sama lainnya

Peluang Distribusi Binomial

$$\mathbf{P_r(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\; p^x . q^{n-x}}$$

Rata-rata distribusi binomial

$$\mathbf{ɥ = E(x) = n.p}$$

Varian dan standar deviasi distribusi binomial

$$\mathbf{\rho^2 = n.p.q}$$

$$\mathbf{\rho = \sqrt{}n.p.q}$$

dimana;

X = 0, 1, 2, 3,…, n

n! (n factorial) = n(n-1)(n-2)(n-3),…,1

x! (x factorial) = x(x-1)(x-2),….1

- **Contoh**; Bila sekeping uang (koin) yang memiliki muka bergambar angka (A) dan muka bergambar hurup (H) ditoss sebanyak 10 kali. Tentukanlah probabilitas peristiwa muncul muka bergambar angka (A) :
  (a) 6 kali
  (b) Paling banyak 3 kali
  (c) Paling sedikit 2 kali
  (d) Hitung rata-rata jumlah muka A yang muncul dan standar deviasinya

- Jawab :
  Misalkan X adalah variabel acak yang menunjukkan jumlah muka A yang muncul
  $n = 10 \quad p = 0.5 \quad q = 0.5$
  (a) $P(X = 6) = ?$

  $$P(X = 6) = \binom{10}{6} 0.5^6 0.5^{10-4} = 0.2051$$

  (b) $P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$
  $= 0.0010 + 0.0098 + 0.0439 + 0.1172 = 0.1719$
  (c) $P(X \ge 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + \ . \ . \ . + P(X = 10)$
  $P(X \ge 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$
  $= 1 - 0.0010 - 0.0098 = 0.9892$

  (d) Rata-rata jumlah muka A yang muncul : $\mu_x = 10(0.5) = 5$
  Standar deviasi X : $\sigma_x = \sqrt{10(0.5)(0.5)} = 1.58$

DISTRIBUSI POISSON

- Jika variabel acak $X \sim b(n,p)$ dengan n yang besar sekali ($n > 50$) dengan p kecil sekali ($p < 0.01$), maka $np \rightarrow \mu$, dimana μ adalah bilangan positif. Sehingga X dalam hal ini akan berdistribusi Poisson $X \sim p(\mu)$ atau $p(x| n,p)$.
- Hasil pengamatan terhadap peristiwa yang jarang terjadi akan berditribusi Poisson. Peristiwa yang jarang terjadi tersebut ditunjukkan oleh probabilitasnya yang sangat kecil. Sehingga untuk ruang pengamatan yang kecil (n kecil), maka peristiwa tersebut sangat kecil kemungkinannya untuk teramati. Peristiwa tersebut akan teramati jika ruang pengamatannya diperbesar (n diperbesar).

Diketahui seseorang terkena suatu penyakit adalah sangat kecil, misalnya satu per sepuluh ribu orang (p = 0.0001). Sehingga jika pengamatan dilakukan terhadap semua orang yang ada di lingkungan anda (fakultas) yang berjumlah 3 ribu orang, maka kemungkinan anda menemukan jumlah orang yang terkena kanker secara rata-rata sebanyak $\mu = 0.0001 \times 3000 = 0.3$ orang.

- **Fungsi probabilitasnya** adalah : $P(X = x) = \dfrac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$; $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} \dfrac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = 1$
- **Rata-rata dari variabel acak X** : $\mu_X = E(X) = np = \mu$

  Standar deviasinya : $\sigma_x = \sqrt{\mu}$
- **Contoh**: Seorang pengusaha fotocopy menjamin bahwa dalam setiap 1000 lembar hasil fotocopy nya akan ada rata-rata 16 lembar yang rusak. Kalau saudara memintanya untuk memfotocopy 30 lembar, maka berapakah probabilitasnya saudara mendapatkan :

  (a) Tidak ada yang rusak

  (b) Lebih dari 5 lembar yang rusak

  (c) Kurang dari 4 lembar yang rusak
- **Jawab** :

  Misalkan X adalah variabel acak yang menunjukkan jumlah lembar fotocopy yang rusak

  $\mu = 16$ $n = 30$ $p = 16/1000 = 0.016$ $X \sim p(16) \rightarrow P(X = x) = \dfrac{16^x e^{-16}}{x!}$

  (a) $P(X = 0) = \dfrac{16^0 e^{-16}}{0!} = e^{-16} = 1.125 \times 10^{-7} = 0.000000125$

  (b) $P(X > 5) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + \ldots$

  $= 1 - P(X=0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4) - P(X = 5)$

  $P(X = 0) = 1.125351747 \times 10^{-7}$

  $P(X = 1) = \dfrac{16^1 e^{-16}}{1!} = 16 e^{-16} = 1.800562796 \times 10^{-6}$

  $P(X = 2) = \dfrac{16^2 e^{-16}}{2!} = 1.440450236 \times 10^{-5}$

  $P(X = 3) = \dfrac{16^3 e^{-16}}{3!} = 7.682401261 \times 10^{-5}$

$P(X = 4) = \dfrac{16^4 e^{-16}}{4!} = 3.072960504 \ \ x10^{-4}$

$P(X = 5) = \dfrac{16^5 e^{-16}}{5!} = 9.833473613 \ \ x10^{-4}$

$P(X > 5) = 1 - 0.00138 = 0.99862$

(c) $P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$= 9.314161294 \text{ x } 10^{-5} = 0.000093$

DISTRIBUSI NORMAL

- Distribusi Normal yang juga disebut sebagai Distribusi Gauss merupakan distribusi probabilitas variabel acak kontinu yang paling penting dan banyak dijumpai dalam masalah sosial maupun eksakta (natural).

- Bila X adalah variabel acak yang berdistribusi Normal dengan rata-rata μ dan varians σ^2 yang dituliskan sebagai $X \sim N(\mu;\sigma^2)$, maka fungsi probabilitas untuk X dirumuskan sebagai :

  $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} ; \qquad -\infty < x < \infty \text{ dan } \sigma > 0$$

  Probability Density Function untuk X tersebut ditulis sebagai :

  $$P(-\infty < x < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1$$

- Untuk menghitung nilai probabilitas variabel acak X yang berdistribusi Normal dengan menggunakan perumusan di atas adalah sangat sulit, karena memerlukan pengetahuan kalkulus lanjut (advance calculus) serta kurang praktis untuk diterapkan dalam analisa data pada umumnya. Misalnya $X \sim N(80;25)$, hitunglah $P(72 \le X \le 92)$, dengan rumus di atas menjadi :
- Agar penggunaannya mudah dan cepat, maka dilakukan transformasi dengan menggunakan variabel acak transformasi Z sebagai berikut :

  $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Z disebut juga sebagai angka baku yang juga berdistribusi Normal dengan rata-rata 0 dan varians 1 yang dituliskan sebagai Z ~ N(0;1). Distribusi variabel acak Z disebut distribusi Normal Baku (Normal Standard Distribution) dengan fungsi probabilitasnya dirumuskan sebagai berikut :

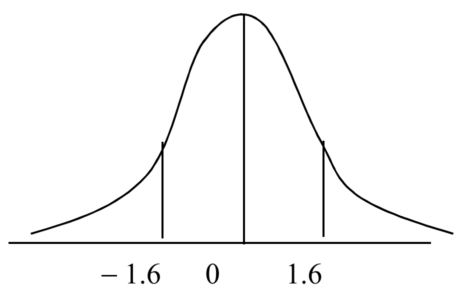
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}; \qquad -\infty < z < \infty$$

Untuk keperluan praktis, nilai-nilai probabilitas variabel acak Z yang dihitung dengan rumus tersebut dapat dilihat dalam tabel normal baku.

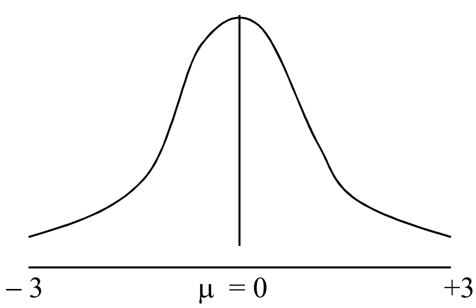
- Sehingga untuk mengetahui nilai $P(72 \le X \le 92)$, sekarang diubah dulu menjadi :

$$Z_1 = \frac{72-80}{5} = -1.6 \quad \text{dan} \quad Z_2 = \frac{92-80}{5} = 1.6 \;\rightarrow\; P(-1.6 \le Z \le 1.6)$$

untuk itu bisa dilihat dengan mudah jawabannya jika menggunakan Tabel Normal baku. Dalam hal ini, untuk $P(-1.6 \le Z \le 1.6) = 0.4452 + 0.4452 = 0.8904$



- Kurva dari fungsi probabilitas X yang berdistribusi Normal berbentuk lonceng (bell shape) yang tertelungkup seperti berikut :



Ciri-ciri dari kurva Normal :

- Simetris terhadap sumbu vertikal, untuk Z ~ N(0;1) maka $P(-\infty < Z < \infty) = 1$ sehingga $P((-\infty < Z < 0) = 0.5$ dan $P(0 < Z < \infty) = 0.5$
- $P(-3 < Z < 3) \rightarrow 1.0$

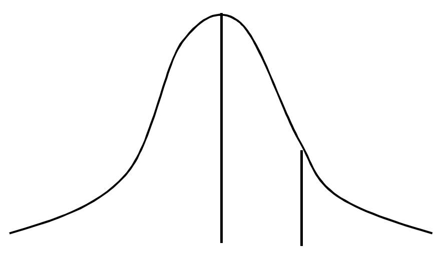
Kurva Normal tidak pernah menyentuh sumbu horizontal. Sumbu horizontal merupakan asimptot dari kurva Normal. Dalam hal ini, kurva Normal akan mendekati asimptot pada saat $X = \mu + 3\sigma$ ke kanan dan $X = \mu - 3\sigma$ ke kiri

PENGGUNAAN TABEL NORMAL BAKU

1. Hitunglah nilai probabilitas dari :
   (a) $P(0 \le Z \le 1.72)$
   (b) $P(1.5 \le Z \le 2.85)$
   (c) $P(-1.65 \le Z \le 1.65)$
   (d) $P(-1.75 \le Z \le -0.45)$

   Jawab : Lihat Tabel Normal Baku dan perhatikan gambar kurvanya

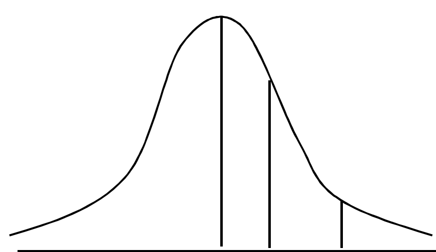
   (a) $P(0 \le Z \le 1.72) = 0.4573$



0 1.72

   (b) $P(1.5 \le Z \le 2.85) = P(0 \le Z \le 2.85) - P(0 \le Z \le 1.5)$

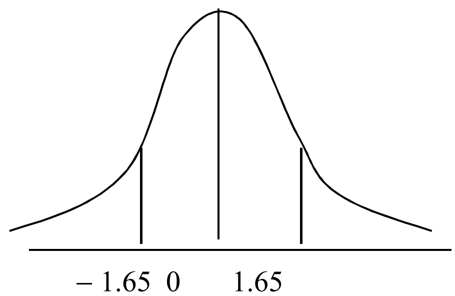
   $= 0.4978 - 0.04332 = 0.0646$



0 1.5 2.85

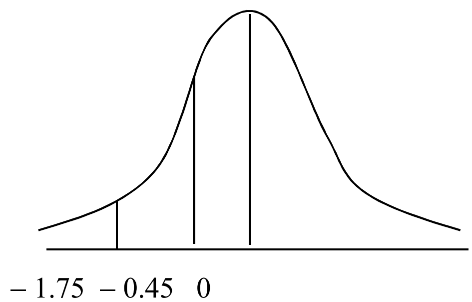
(c) $P(-1.65 \le Z \le 1.65) = P(-1.65 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1.65)$

$= 0.4505 + 0.04505 = 0.901$



(d) $P(-1.75 \le Z \le -0.45) = P(-1.75 \le Z \le 0) - P(-0.45 \le Z \le 0)$

$= 0.4599 - 0.1736 = 0.2863$



Nilai rata-rata dari 750 calon maha~~siswa dalam ujian saringan masuk~~ FE Universitas “ABC” untuk mata pelajaran matematika adalah 55 dengan standar deviasinya 20. Bila nilai tersebut diasumsikan berdistribusi Normal, maka tentukan probabilitasnya bahwa seorang calon mahasiswa yang dipilih secara acak akan mendapat nilai matematika :

(e) Antara 36 dan 65

(f) Paling sedikit 60

(g) Paling besar 45

(h) Jika yang diterima adalah 20% dari calon mahasiswa yang nilainya tertinggi, maka tentukan nilai minimum untuk dapat diterima.

Jawab :

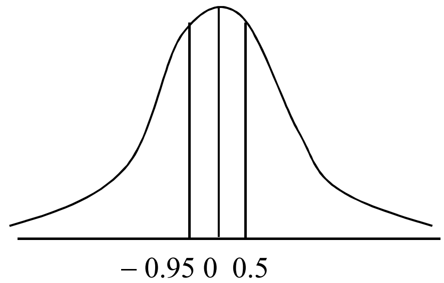
Misalkan X adalah variabel acak yang menunjukkan nilai matematika, $X \sim N(55;400)$

(a) $P(36 < X < 65) = ?$

$$Z_1 = \frac{36-55}{20} = -0.95 \quad \text{dan} \quad Z_2 = \frac{65-55}{20} = 0.5 \;\rightarrow\; P(-0.95 \le Z \le 0.5) = ?$$

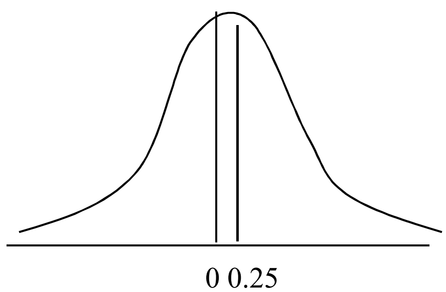
$P(-0.95 \le Z \le 0.5) = P(-0.95 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 0.5)$

$= 0.3289 + 0.1915 = 0.5204$



(b) $P(X \geq 60) = 0.4013$

$$Z = \frac{60-55}{20} = -0.25 \rightarrow P(Z \geq 0.25) = ?$$

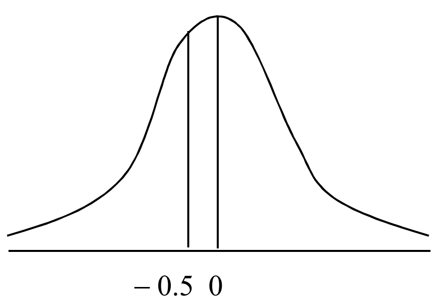


$P(Z \geq 0.25) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.25)$

$= 0.5 - 0.0987 = 0.4013$

(c) $P(X \leq 45) = 0.3085$

$$Z = \frac{45-55}{20} = -0.5 \rightarrow P(Z \geq -0.5) = ?$$

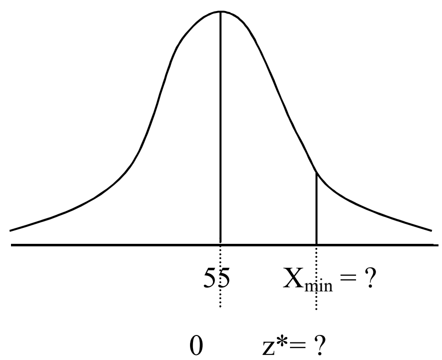


$P(Z \geq 0.25) = 0.5 - P(-0.5 \leq Z \leq 0)$

$= 0.5 - 0.1915 = 0.3085$

(d) $P(X = X_{min}) = 0.2 \rightarrow X_{min} = ?$

$$Z^* = \frac{X_{min} - 55}{20} \rightarrow 0.84 = \frac{X_{min} - 55}{20} \rightarrow X_{min} = 16.8 + 55 = 71.8$$



$P(Z \geq z^*) = 0.2 \rightarrow P(0 \leq Z \leq z^*) = 0.3$

$z^* = 0.84$

$X_{min} = 71.8$

(e) Tentukan nilai maksimum dari 20% calon yang nilainya terendah